Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Industrial

IN34A: Clase Auxiliar

Flujo en Redes

Marcel Goic F.[1]

[1]Esta es una versión bastante preliminar por lo que puede contar con numerosas faltas de ortografía y errores no forzados. Si encuentran alguno favor de denunciarlo a mgoic@cec.uchile.cl

1. Una brevísima introducción.

El tema de flujo en redes es muy amplio y tiene muchas aplicaciones: Redes de distribución eléctrica, de comunicación , de regadío, etc. De entre los infinitos problemas posibles, podemos distinguir familias de problemas: Flujo a costo mínimo, Flujo máximo por una red, Ruta mas corta, etc.

En general, muchos de los problemas de redes pueden verse como casos particulares de programación lineal. Sin embargo, aun para instancias pequeñas, los problemas de redes tienen tener demasiadas variables y restricciones haciendo muy dificil su resolución [2]. Es por esto que se hace muy necesario aprovechar la estructura especial de cada problema para encontrar algoritmos especializados a cada caso.

2. Flujo a Costo Mínimo

Queremos buscar una forma de distribuir flujo por una red de modo de hacerlo al menor costo posible.

2.1. Simplex especializado a redes (Resumén)

Solución Básica $\Leftrightarrow$ Árbol Generador.

- $\overline{c_{ij}} = c_{ij} - \pi_i + \pi_j$ $\quad\quad$ π_i, π_j variables duales.
- Condición de optimalidad:
  Sean:
  $$\left.\begin{array}{lcl} f_{ij} & = & \text{Flujo por el arco ij.} \\ l_{ij} & = & \text{Cota mínima para el flujo por el arco ij.} \\ u_{ij} & = & \text{Cota máxima para el flujo por el arco ij.} \end{array}\right\} \quad l_{ij} \leq f_{ij} \leq u_{ij}$$
  Con esto las condiciones de optimalidad pueden resumirse como:

  (1) $\overline{c_{ij}} = 0 \quad \forall (i,j)$básico.

  (2) $\overline{c_{ij}} \geq 0 \quad \forall (i,j)$ no básico tal que$f_{ij} = l_{ij}$.

  (3) $\overline{c_{ij}} \leq 0 \quad \forall (i,j)$ no básico tal que$f_{ij} = u_{ij}$.

  Luego, lo que tenemos que hacer es resolver (1) teniendo como incógnitas los π. Para ello, requerimos asignar $\pi_r = 0$ para algún r arbitrario. Con estos valores de π_i vemos si se cumplen las condiciones (2) y (3).
- Variable que entra: (p,q) con máxima violación de optimalidad.

[2]Por ejemplo, hasta Abril de 1999, el clásico problema del vendedor viajero solo había sido resuelto para 13509 ciudades, lo cual demoró 4 meses en ser resuelto utilizando para ello 3 servidores, un total de 12 procesadores y 32 PCs.

- Variable que sale: Al agregar el flujo (p,q) en el árbol generador formado por las variables básicas, se formará un ciclo.
  - Si $f_{pq} = l_{pq} \Rightarrow$ Aumentamos el flujo por (p,q)
  - Si $f_{pq} = u_{pq} \Rightarrow$ Disminuimos el flujo por (p,q)

  Luego se envía flujo hasta que:

  I) Arco (r, s) en el sentido del flujo se satura en cota superior $u_{rs} \Rightarrow (r, s)$ sale de la base con valor u_{rs}.
  II) Arco (r, s) en el sentido contrario al flujo alcanza la cota inferior $l_{rs} \Rightarrow (r, s)$ sale de la base con valor l_{rs}.
  III) Arco (p, q) alcanza su otra cota $\Rightarrow$ No hay cambio de base, solo cambian los valores de los flujos.

  Notar que en cada iteración cambian todos los valores de los flujos que estaban involucrados en la formación de un ciclo en el árbol generador (recordar que siempre debe cumplirse la restricción de conservación de flujo en cada nodo).

2.2. Fase I en redes (Resumén)

Simplex especializado a redes nos exige una solucin básica factible inicial. Si no disponemos de ella, requeriremos de un algoritmo para buscarla.

1. Agregamos un nodo artificial μ con los respectivos arcos que lo unan a los nodos ya existentes en el problema original (cotas: $(0, +\infty)$).
2. Definimos un flujo inicial factible para cada uno de los arcos:
   - Para los arcos del problema original fijamos el flujo en la cota inferior.
   - Para los nuevos asignamos el flujo tal que el problema sea factible.
3. Resolvemos el problema tomando como base inicial (arbol generador), los flujos asociados al nodo artificial μ y asignando la siguiente estructura de costos:
   - Arcos originales: $c_{ij} = 0$
   - Arcos artificiales: $c_{\mu k}, c_{k\mu} = 1$

   Con esto, la función objetivo será minimizar el flujo por los arcos artificiales:

   $$\min\ w = \sum_i f_{i\mu} + \sum_j f_{\mu j}$$

   Finalmente:

   - Si $w^* = 0 \Longrightarrow$ Tenemos base inicial.
   - Si $w^* > 0 \Longrightarrow$ Problema Infactible.

3. Flujo Máximo

Ahora nos interesará encontrar la mayor cantidad de flujo F que podemos enviar entre 2 puntos de una red sin importar que tan costoso sea.

3.1. Algoritmo de Marcas (Resumén)

1. Determinar un flujo factible (Si las cotas inferiores a los flujos por todos los arcos de la red son nulas, entonces $f_{ij} = 0$ para todo (i,j) es factible para la red)[3].

2. Construir un grafo auxiliar:

   - Los nodos del grafo auxiliar son los mismos que el grafo original.
   - Agregamos arcos
     - Si $f_{ij} < u_{ij}$, el arco (i,j) se incorpora al grafo auxiliar. Se agrega el arco (i,j) a $B_1 = \{$conjunto de arcos hacia delante$\}$
     - Si $f_{ij} > l_{ij}$, el arco (j,i) se incorpora al grafo auxiliar. Se agrega el arco (j,i) a $B_2 = \{$conjunto de arcos hacia atrás$\}$
       Notar que si $l_{ij} < f_{ij} < u_{ij}$, debemos agregar 2 arcos: uno hacia delante y otro hacia atrás

3. Buscar un camino C desde el nodo de origen O al nodo de destino D (recordar que un camino de O a D es una secuencia de arcos orientados que unen O con D)[4].

   - Si $\nexists$ camino C que una O con D $\Rightarrow$ Estamos en el ptimo.
   - Si $\exists$ camino C que una O con D, debemos buscar la cantidad de flujo θ que podemos aumentar por dicho camino:

$$\theta = \text{mín}\{\Delta_{ij} | (i,j) en C\} \qquad \text{con } \Delta_{ij} = \begin{cases} u_{ij} - f_{ij} & \text{Si } u_{ij} > f_{ij} \\ f_{ij} - l_{ij} & \text{Si } f_{ij} > l_{ij} \end{cases}$$

4. Actualizamos los flujos (solo para aquellos arcos en C):

$$\begin{array}{ll} F := F + \theta & \\ f_{ij} := f_{ij} + \theta & (i,j) \in B_1 \\ f_{ij} := f_{ij} - \theta & (i,j) \in B_2 \end{array}$$

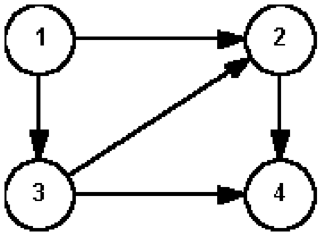
[3] Si no, dedemos de hacer algo similar a la fase I de simplex especializado a redes

[4] Por el momento realizaremos esta búsqueda por inspección (no es díficil), pero para problemas complejos deben implementarse algoritmos especiales de búsqueda

4. Problemas

4.1. Problema 1

Se deben transportar 15 toneladas de materia prima desde la ciudad 1 hasta la ciudad 4. Las alternativas de caminos se presentan en la siguiente malla:



Se pretende minimizar el costo de transporte de estas 15 toneladas de materia prima. Para resolver este problema se dispone de la siguiente información:

Arco(i,j)	Costo Unitario	Flujo Mínimo	Flujo Máximo
(1,2)	3	0	10
(1,3)	2	1	13
(3,2)	3	0	9
(2,4)	5	4	11
(3,4)	6	2	12

a) Dibuje 4 árboles generadores de la malla anterior y diga que representa un árbol generador en el contexto de simplex especializado en redes.

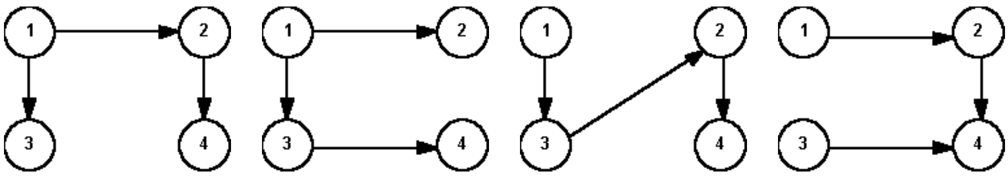
b) Utilice fase I al problema anterior para encontrar una solución básica factible.

c) Comente de que manera resolvería el problema si no pudiese aplicar fase I.

d) Explique como procedería a continuación para encontrar el óptimo del problema original, utilizando los resultados de fase I.

Solución

a) Un árbol generador equivale a una base para simplex especializado a redes. Para nuestro ejemplo tenemos por ejemplo:

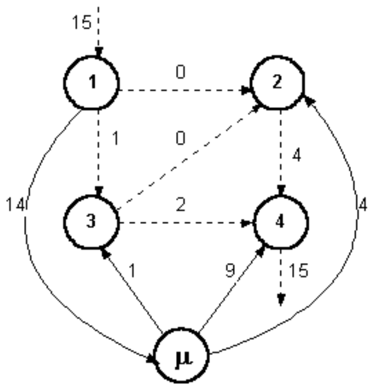


b) Para plantear Fase I, agregamos un nodo artificial μ y arcos de modo que lo unan con cada uno de los nodos ya existente. Además debemos definir la siguiente estructura de costos:

$$\begin{aligned} c_{12} &= 0 \\ c_{13} &= 0 \\ c_{32} &= 0 \\ c_{24} &= 0 \\ c_{34} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} c_{1\mu} &= 1 \\ c_{\mu 2} &= 1 \\ c_{\mu 3} &= 1 \\ c_{\mu 4} &= 1 \end{aligned}$$

- ITERACIÓN 1:

  Comenzamos a iterar con nuestra solución básica factible inicial compuesta por los arcos asociados al nodo artificial cuyos flujos iniciales se determinan de modo que el problema sea factible (dado que fijamos los flujos por los arcos ya existentes en sus cotas inferiores):

  Base: $f_{1\mu}, f_{\mu 2}, f_{\mu 3}, f_{\mu 4}$

  Observación: Las lineas completas denotarán los flujos básicos y las lineas punteadas denotarán el resto de los flujos.

  - Condición de Optimalidad:

    - Flujos Básicos

      $$\begin{aligned} (f_{1\mu}) \quad & \overline{c_{1\mu}} = 1 - \pi_1 + \pi_\mu = 0 \\ (f_{\mu 2}) \quad & \overline{c_{\mu 2}} = 1 - \pi_\mu + \pi_2 = 0 \\ (f_{\mu 3}) \quad & \overline{c_{\mu 3}} = 1 - \pi_\mu + \pi_3 = 0 \\ (f_{\mu 4}) \quad & \overline{c_{\mu 4}} = 1 - \pi_\mu + \pi_4 = 0 \end{aligned}$$

      Haciendo $\pi_\mu = 0$:
      $\pi_1 = 1$
      $\pi_2 = -1$
      $\pi_3 = -1$
      $\pi_4 = -1$

- Flujos No Básicos

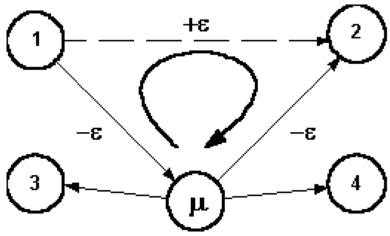
$$\begin{array}{llcccccl}
(f_{12}) & \overline{c_{12}} = 0 - \pi_1 + \pi_2 & = & \text{-2} & < & 0 & \times & (f_{12} = l_{12}) \\
(f_{13}) & \overline{c_{13}} = 0 - \pi_1 + \pi_3 & = & \text{-2} & < & 0 & \times & (f_{13} = l_{13}) \\
(f_{32}) & \overline{c_{32}} = 0 - \pi_3 + \pi_2 & = & 0 & \geq & 0 & \checkmark & (f_{32} = l_{32}) \\
(f_{24}) & \overline{c_{24}} = 0 - \pi_2 + \pi_4 & = & 0 & \geq & 0 & \checkmark & (f_{24} = l_{24}) \\
(f_{34}) & \overline{c_{34}} = 0 - \pi_3 + \pi_4 & = & 0 & \geq & 0 & \checkmark & (f_{34} = l_{34})
\end{array}$$

- Variable que Entra:

  Puede entrar tanto (1,2) como (1,3) pues ambos violan la optimalidad en la misma cantidad. Tomemos por ejemplo que entre (1,2).

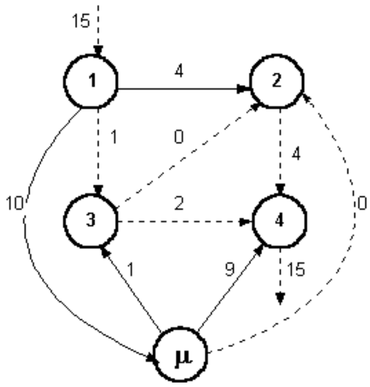
- Variable que Sale:

  Para ver cual sale analizamos el ciclo que se forma al agregar el arco (1,2) al árbol generador que es nuestra base actual:



$$\left.\begin{array}{lcl}
\epsilon_{12}^{\text{máx}} & = & 10 \\
\epsilon_{\mu 2}^{\text{máx}} & = & 4 \\
\epsilon_{1\mu}^{\text{máx}} & = & 14
\end{array}\right\} \quad \text{mín}\,\{\epsilon_{ij}^{\text{máx}}\} = 4 \Rightarrow f_{\mu 2} \text{ Sale de la base}$$

- ITERACIÓN 2:
  Solución básica factible:



Base: $f_{12}, f_{1\mu}, f_{\mu 3}, f_{\mu 4}$

- Condición de Optimalidad:

- Flujos Básicos

$$\begin{array}{ll} (f_{12}) & \overline{c_{12}} = 1 - \pi_1 + \pi_2 = 0 \\ (f_{1\mu}) & \overline{c_{1\mu}} = 1 - \pi_1 + \pi_\mu = 0 \\ (f_{\mu 3}) & \overline{c_{\mu 3}} = 1 - \pi_\mu + \pi_3 = 0 \\ (f_{\mu 4}) & \overline{c_{\mu 4}} = 1 - \pi_\mu + \pi_4 = 0 \end{array}$$

Haciendo $\pi_\mu = 0$:

$$\begin{array}{l} \pi_1 = 1 \\ \pi_2 = 1 \\ \pi_3 = -1 \\ \pi_4 = -1 \end{array}$$

- Flujos No Básicos

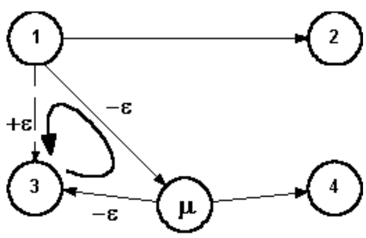
$$\begin{array}{lllllllll} (f_{13}) & \overline{c_{13}} = 0 - \pi_1 + \pi_3 & = & \text{-2} & < & 0 & \times & (f_{13} = l_{13}) \\ (f_{32}) & \overline{c_{32}} = 0 - \pi_3 + \pi_2 & = & 2 & \geq & 0 & \checkmark & (f_{32} = l_{32}) \\ (f_{24}) & \overline{c_{24}} = 0 - \pi_2 + \pi_4 & = & \text{-2} & < & 0 & \times & (f_{24} = l_{24}) \\ (f_{34}) & \overline{c_{34}} = 0 - \pi_3 + \pi_4 & = & 0 & \geq & 0 & \checkmark & (f_{34} = l_{34}) \\ (f_{\mu 2}) & \overline{c_{12}} = 0 - \pi_\mu + \pi_2 & = & 2 & < & 0 & \checkmark & (f_{\mu 2} = l_{\mu 2}) \end{array}$$

- Variable que Entra:

  Puede entrar tanto (1,3) como (3,2). Tomemos por ejemplo que entre (1,3).

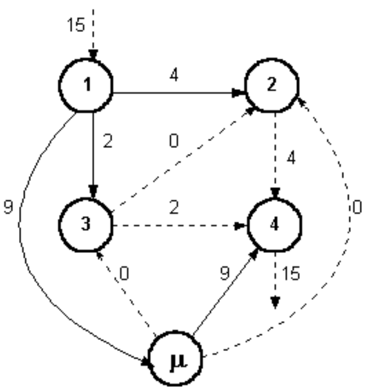
- Variable que Sale:

  Para ver cual sale analizamos el ciclo que se forma al agregar el arco (1,3) al árbol generador que es nuestra base actual:



$$\left.\begin{array}{lll} \epsilon_{13}^{\text{máx}} & = & 12 \\ \epsilon_{1\mu}^{\text{máx}} & = & 10 \\ \epsilon_{\mu 3}^{\text{máx}} & = & 1 \end{array}\right\} \quad \text{mín}\,\{\epsilon_{ij}^{\text{máx}}\} = 1 \Rightarrow f_{\mu 3} \text{ Sale de la base}$$

- ITERACIÓN 3:
  Solución básica factible:



Base: $f_{12}, f_{13}, f_{1\mu}, f_{\mu 4}$

- Condición de Optimalidad:
  - Flujos Básicos

$$
\begin{array}{ll}
(f_{12}) & \overline{c_{12}} = 1 - \pi_1 + \pi_2 = 0 \\
(f_{13}) & \overline{c_{13}} = 1 - \pi_1 + \pi_3 = 0 \\
(f_{1\mu}) & \overline{c_{1\mu}} = 1 - \pi_1 + \pi_\mu = 0 \\
(f_{\mu 4}) & \overline{c_{\mu 4}} = 1 - \pi_\mu + \pi_4 = 0
\end{array}
$$

Haciendo $\pi_1 = 0$:

$\pi_2 = 0$
$\pi_3 = 0$
$\pi_4 = -2$
$\pi_\mu = -1$

  - Flujos No Básicos

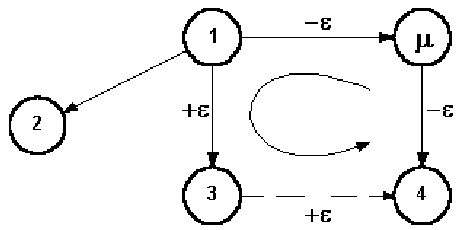
$$
\begin{array}{llcccccl}
(f_{32}) & \overline{c_{32}} = 0 - \pi_3 + \pi_2 & = & 0 & \geq & 0 & \checkmark & (f_{32} = l_{32}) \\
(f_{24}) & \overline{c_{24}} = 0 - \pi_2 + \pi_4 & = & \text{-2} & < & 0 & \times & (f_{24} = l_{24}) \\
(f_{34}) & \overline{c_{34}} = 0 - \pi_3 + \pi_4 & = & \text{-2} & < & 0 & \times & (f_{34} = l_{34}) \\
(f_{\mu 2}) & \overline{c_{\mu 2}} = 0 - \pi_\mu + \pi_2 & = & 2 & \geq & 0 & \checkmark & (f_{\mu 2} = l_{\mu 2}) \\
(f_{\mu 3}) & \overline{c_{\mu 3}} = 0 - \pi_\mu + \pi_3 & = & 2 & \geq & 0 & \checkmark & (f_{\mu 2} = l_{\mu 2})
\end{array}
$$

- Variable que Entra:

  Puede entrar tanto (2,4) como (3,4). Tomemos por ejemplo que entre (3,4).

- Variable que Sale:

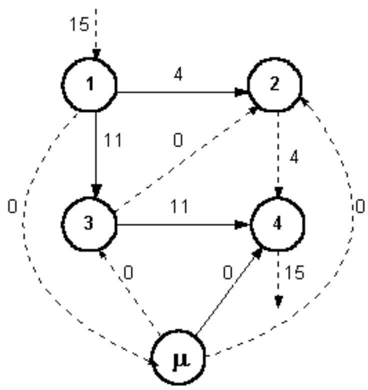
  Para ver cual sale analizamos el ciclo que se forma al agregar el arco (3,4) al árbol generador que es nuestra base actual:



$$\left.\begin{array}{lcl}\epsilon_{1\mu}^{\text{máx}} & = & 9\\ \epsilon_{\mu 4}^{\text{máx}} & = & 9\\ \epsilon_{34}^{\text{máx}} & = & 10\\ \epsilon_{13}^{\text{máx}} & = & 11\end{array}\right\} \quad \text{mín}\,\{\epsilon_{ij}^{\text{máx}}\} = 9 \Rightarrow \text{ Sale } f_{1\mu} \text{ o } f_{\mu 4}.$$

Tomemos arbitrariamente a $f_{1\mu}$ como variable que sale de la base.

- Iteración 4:
  Solución básica factible:



Base: $f_{12}, f_{13}, f_{34}, f_{\mu 4}$

Notar que aquí, ya logramos $w^* = 0$ y por tanto tendriamos una base factible inicial.

- Condición de Optimalidad:

  - Flujos Básicos

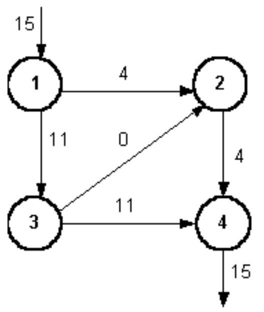
$$\begin{array}{ll}(f_{12}) & \overline{c_{12}} = 1 - \pi_1 + \pi_2 = 0\\ (f_{13}) & \overline{c_{13}} = 1 - \pi_1 + \pi_3 = 0\\ (f_{34}) & \overline{c_{34}} = 1 - \pi_3 + \pi_4 = 0\\ (f_{\mu 4}) & \overline{c_{\mu 4}} = 1 - \pi_\mu + \pi_4 = 0\end{array}$$

Haciendo $\pi_1 = 0$:
$\pi_2 = 0$
$\pi_3 = 0$
$\pi_4 = 0$
$\pi_\mu = 1$

- Flujos No Básicos

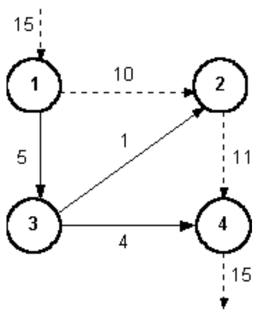
$$\begin{array}{llcccccl}
(f_{32}) & \overline{c_{32}} = 0 - \pi_3 + \pi_2 & = & 0 & \geq & 0 & \checkmark & (f_{32} = l_{32}) \\
(f_{24}) & \overline{c_{24}} = 0 - \pi_2 + \pi_4 & = & 0 & \geq & 0 & \checkmark & (f_{24} = l_{24}) \\
(f_{1\mu}) & \overline{c_{1\mu}} = 0 - \pi_1 + \pi_\mu & = & 2 & \geq & 0 & \checkmark & (f_{34} = l_{34}) \\
(f_{\mu 2}) & \overline{c_{\mu 2}} = 0 - \pi_\mu + \pi_2 & = & 0 & \geq & 0 & \checkmark & (f_{\mu 2} = l_{\mu 2}) \\
(f_{\mu 3}) & \overline{c_{\mu 3}} = 0 - \pi_\mu + \pi_3 & = & 0 & \geq & 0 & \checkmark & (f_{\mu 3} = l_{\mu 3})
\end{array}$$

Como ya habíamos predicho, la solución basica es óptima.
Finalmente, como en nuestro óptimo se verifica que $w^* = 0$, tenemos una base factible. En efecto, $w^* = 0$ implica que no existe flujo circulando por arcos $(\mu, *)$ y $(*, \mu)$ y por tanto podemos eliminar el nodo artificial μ.
Así, nuestra base inicial (árbol generador) viene dada por:



Notar que esta base es degenerada pues tiene flujos en su cota mínima ($f_{2,3}$ y f_{24}).

c) Como es un problema pequeño, podemos encontrar por inspeccion una base factible inicial, escogiendo un arbol generador y asignando flujos tal que queden el número adecuado de flujos en sus cotas. Así por ejemplo:



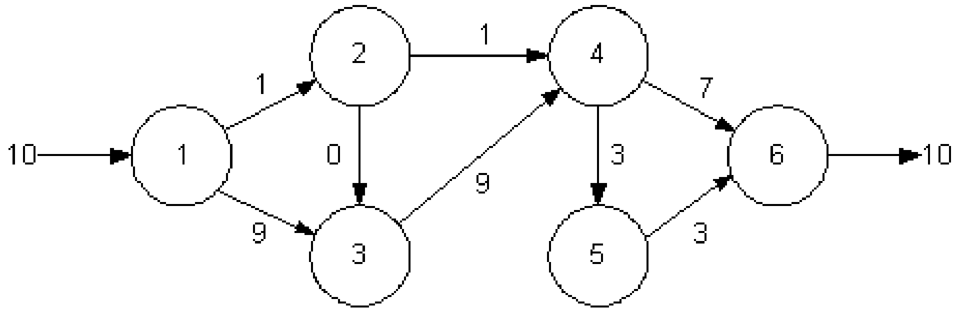
En este caso, la base esta compuesta por f_{13},$f_{3,2}$ y f_{34} porque los otros 2 alcanzan sus cotas superiores:

$$f_{12} = u_{12} = 10 \qquad f_{24} = u_{24} = 11$$

d) Con la base encontrada en b), comenzamos a iterar considerando la estructura de costos inicial.

4.2. Problema 2

La señora Julia es una abnegada madre y debe enviar a sus 10 hijos a la escuela del pueblo. Para esto, nuestra distinguida dama cuenta con varias alternativas de transporte las que tiene asociado un costo, capacidad mínima y máxima. La señora tiene la impresión de que su actual sistema de transporte no es el más económico posible y quiere encontrar una mejor alternativa. El sistema que actualmente utiliza la señora Julia para enviar a sus hijos a la escuela puede resumirse en el siguiente grafo:



Además, se conocen los costos unitarios de transporte, cota mínima y maxima para cada uno de los arcos y se resumen en la siguiente tabla:

Arco(i,j)	**Costo Unitario**	**L (Flujo Mínimo)**	**U (Flujo Máximo)**
(1,2)	2	0	3
(1,3)	4	3	11
(2,3)	1	0	4
(2,4)	4	1	9
(3,4)	6	2	10
(4,5)	1	3	6
(4,6)	5	0	8
(5,6)	3	3	6

Con estos datos y considerando como base inicial los flujos f_{12}, f_{13}, f_{34}, f_{45} y f_{46}, encuentre la política ptima de envío de los hijo de la Sra. Julia a la escuela.

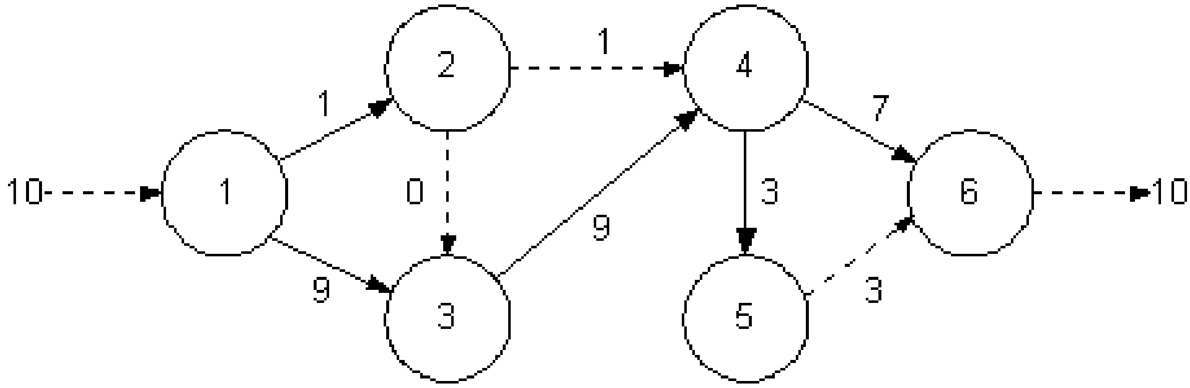
Solución

- Iteración 1:

  Tenemos una solución básica factible inicial dada por enunciado:

  Observación: Al igual que en el problema anterior, las lineas completas denotarán los flujos básicos y las lineas punteadas denotarán el resto de los flujos.

  - Condición de Optimalidad:



Base: $f_{12}, f_{13}, f_{34}, f_{45}, f_{46}$

- Flujos Básicos

$$\begin{array}{ll} (f_{12}) & \overline{c_{12}} = c_{12} - \pi_1 + \pi_2 = 0 \\ (f_{13}) & \overline{c_{13}} = c_{13} - \pi_1 + \pi_3 = 0 \\ (f_{34}) & \overline{c_{34}} = c_{34} - \pi_3 + \pi_4 = 0 \\ (f_{46}) & \overline{c_{46}} = c_{46} - \pi_4 + \pi_6 = 0 \\ (f_{45}) & \overline{c_{45}} = c_{45} - \pi_4 + \pi_5 = 0 \end{array}$$

Evaluando en los c_{ij} dados por la tabla de costos y haciendo $\pi_4 = 0$:

$\pi_2 = 8$
$\pi_1 = 10$
$\pi_3 = 6$
$\pi_6 = -5$
$\pi_5 = -1$

- Flujos No Básicos

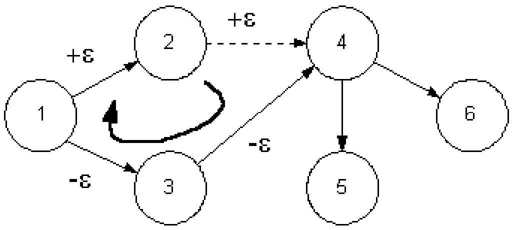
$$\begin{array}{lccccccc} (f_{23}) & \overline{c_{23}} = 1 - \pi_2 + \pi_3 & = & \text{-1} & < & 0 & \times & (f_{23} = l_{23}) \\ (f_{24}) & \overline{c_{24}} = 4 - \pi_2 + \pi_4 & = & \text{-4} & < & 0 & \times & (f_{24} = l_{24}) \\ (f_{56}) & \overline{c_{56}} = 3 - \pi_5 + \pi_6 & = & \text{-1} & < & 0 & \times & (f_{56} = l_{56}) \end{array}$$

- Variable que Entra:

  Entra f_{24} ya que es el que viola la optimalidad en mayor magnitud.

- Variable que Sale:

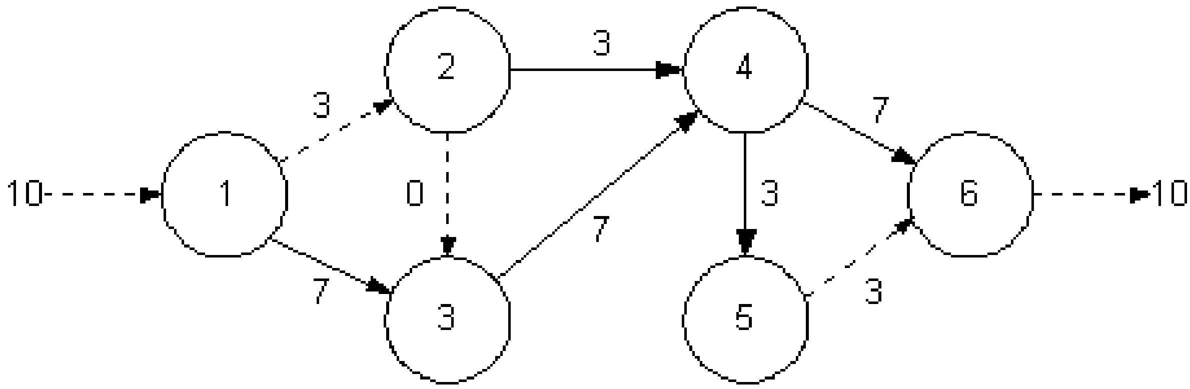
  Para ver cual sale analizamos el ciclo que se forma al agregar el arco (2,4) al árbol generador que es nuestra base actual:



$$\left.\begin{array}{lcl}\epsilon_{24}^{\text{máx}} & = & 8\\ \epsilon_{12}^{\text{máx}} & = & 2\\ \epsilon_{13}^{\text{máx}} & = & 6\\ \epsilon_{34}^{\text{máx}} & = & 7\end{array}\right\} \quad \text{mín}\,\{\epsilon_{ij}^{\text{máx}}\} = 2 \Rightarrow f_{12} \text{ Sale de la base}$$

- Iteración 2:

  Solución básica factible:



Base: $f_{24}, f_{13}, f_{34}, f_{45}, f_{46}$

- Condición de Optimalidad:

  - Flujos Básicos

$$\begin{array}{ll}(f_{13}) & \overline{c_{13}} = 4 - \pi_1 + \pi_3 = 0\\ (f_{24}) & \overline{c_{24}} = 4 - \pi_2 + \pi_4 = 0\\ (f_{34}) & \overline{c_{34}} = 6 - \pi_3 + \pi_4 = 0\\ (f_{46}) & \overline{c_{46}} = 5 - \pi_4 + \pi_6 = 0\\ (f_{45}) & \overline{c_{45}} = 1 - \pi_4 + \pi_5 = 0\end{array}$$

Haciendo $\pi_4 = 0$:

$\pi_1 = 10$
$\pi_2 = 4$
$\pi_3 = 6$
$\pi_6 = -5$

$\pi_5 = -1$

- Flujos No Básicos

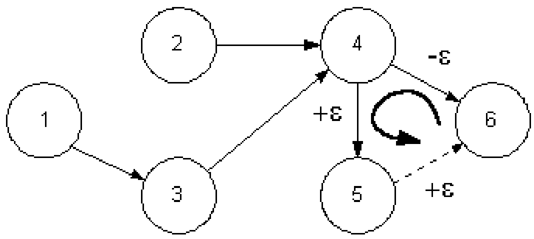
$$
\begin{array}{llcccccl}
(f_{12}) & \overline{c_{12}} = 2 - \pi_1 + \pi_2 & = & \text{-4} & \leq & 0 & \checkmark & (f_{12} = u_{12}) \\
(f_{23}) & \overline{c_{23}} = 1 - \pi_2 + \pi_3 & = & 3 & \geq & 0 & \checkmark & (f_{23} = l_{23}) \\
(f_{56}) & \overline{c_{56}} = 3 - \pi_5 + \pi_6 & = & \text{-1} & < & 0 & \times & (f_{56} = l_{56})
\end{array}
$$

- Variable que Entra:

  La única variable que no cumple con el criterio de optimalidad es f_{56} y por tanto ella entra a la base.

- Variable que Sale:

  Para ver cual sale analizamos el ciclo que se forma al agregar el arco (5,6) al árbol generador que es nuestra base actual:



$$
\left.\begin{array}{lcl}
\epsilon_{56}^{\text{máx}} & = & 3 \\
\epsilon_{46}^{\text{máx}} & = & 7 \\
\epsilon_{45}^{\text{máx}} & = & 3
\end{array}\right\} \quad \text{mín}\,\{\epsilon_{ij}^{\text{máx}}\} = 3 \Rightarrow \text{Pueden salir de la base tanto} f_{45} \text{ como } f_{56}
$$

Aquí, podríamos realizar la iteración 3 considerando que sale de la base f_{45} o que lo hace f_{56} y en ambos casos se debe llegar al mismo resultado. Para mostrarlo, terminaremos de resolver el problema por los 2 caminos:

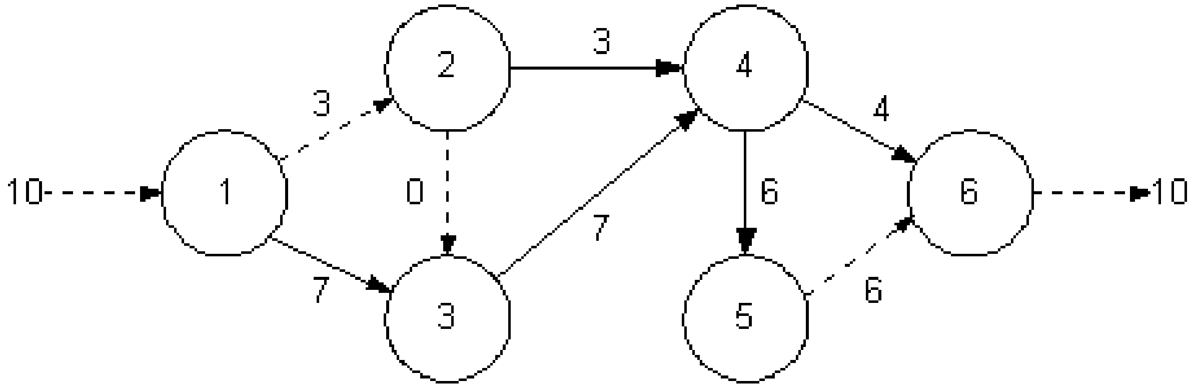
- ITERACIÓN 3.A: f_{56} sale de la base.

  Solución básica factible:

  - Condición de Optimalidad:

    - Flujos Básicos

$$
\begin{array}{ll}
(f_{13}) & \overline{c_{13}} = 4 - \pi_1 + \pi_3 = 0 \\
(f_{24}) & \overline{c_{24}} = 4 - \pi_2 + \pi_4 = 0 \\
(f_{34}) & \overline{c_{34}} = 6 - \pi_3 + \pi_4 = 0 \\
(f_{46}) & \overline{c_{46}} = 5 - \pi_4 + \pi_6 = 0
\end{array}
$$



Base: $f_{13}, f_{24}, f_{34}, f_{46}, f_{45}$

(f_{45}) $\overline{c_{45}} = 1 - \pi_4 + \pi_5 = 0$

Eligiendo arbitrariamente π_4 para hacerlo 0:

$\pi_1 = 10$
$\pi_2 = 4$
$\pi_3 = 6$
$\pi_6 = -5$
$\pi_5 = -1$

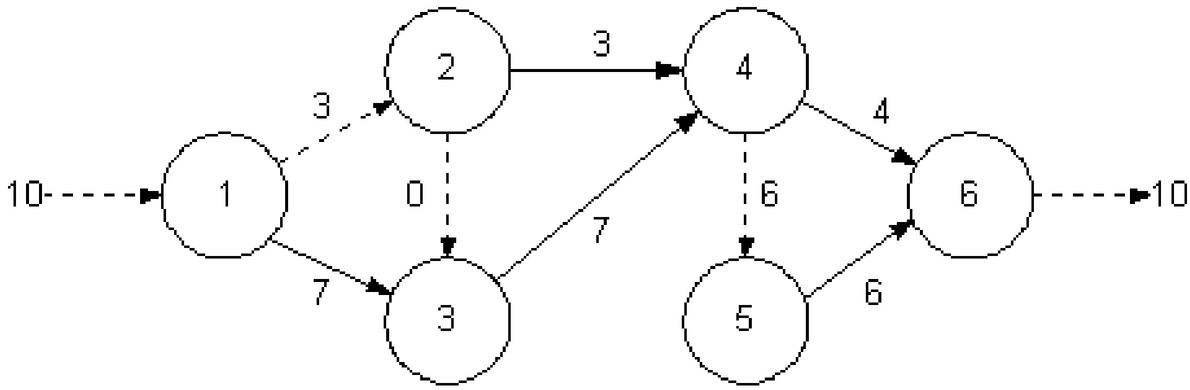
- Flujos No Básicos

(f_{12})	$\overline{c_{12}} = 2 - \pi_1 + \pi_2$	=	-4	$\leq$	0	✓	$(f_{12} = u_{12})$
(f_{23})	$\overline{c_{23}} = 1 - \pi_2 + \pi_3$	=	3	$\geq$	0	✓	$(f_{23} = l_{23})$
(f_{56})	$\overline{c_{56}} = 3 - \pi_5 + \pi_6$	=	-1	$\leq$	0	✓	$(f_{56} = u_{56})$

Por lo tanto la solución es óptima. Observar que este óptimo es degenerado pues en la base hay flujos que estan en su cota (f_{45})

- Iteración 3.b: f_{45} sale de la base.

  Solución básica factible:



Base: $f_{13}, f_{24}, f_{34}, f_{46}, f_{56}$

Observación: Notar que los flujos son idénticos a los de la iteracin 3.a en que consideramos que f_{56} salía de la base. La única diferencia radica en que flujo consideramos como básico.

- Condición de Optimalidad:

  - Flujos Básicos

$$\begin{array}{ll}
(f_{13}) & \overline{c_{13}} = 4 - \pi_1 + \pi_3 = 0 \\
(f_{24}) & \overline{c_{24}} = 4 - \pi_2 + \pi_4 = 0 \\
(f_{34}) & \overline{c_{34}} = 6 - \pi_3 + \pi_4 = 0 \\
(f_{46}) & \overline{c_{46}} = 5 - \pi_4 + \pi_6 = 0 \\
(f_{56}) & \overline{c_{56}} = 3 - \pi_5 + \pi_6 = 0
\end{array}$$

Eligiendo arbitrariamente π_4 para hacerlo 0:

$\pi_1 = 10$
$\pi_2 = 4$
$\pi_3 = 6$
$\pi_6 = -5$
$\pi_5 = -2$

  - Flujos No Básicos

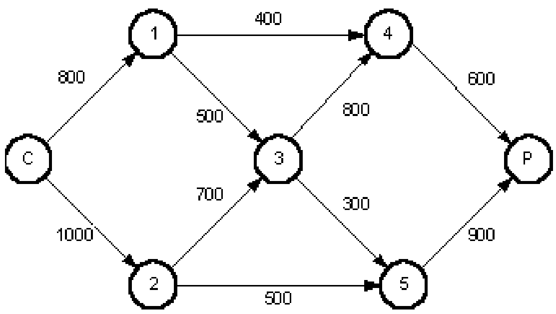
$$\begin{array}{llcccccc}
(f_{12}) & \overline{c_{12}} = 2 - \pi_1 + \pi_2 & = & \text{-4} & \leq & 0 & \checkmark & (f_{12} = u_{12}) \\
(f_{23}) & \overline{c_{23}} = 1 - \pi_2 + \pi_3 & = & 3 & \geq & 0 & \checkmark & (f_{23} = l_{23}) \\
(f_{45}) & \overline{c_{45}} = 1 - \pi_4 + \pi_5 & = & \text{-1} & \leq & 0 & \checkmark & (f_{45} = u_{45})
\end{array}$$

Por lo tanto la solución es óptima y nuevamente es degenerada.

4.3. Problema 3

Cachiyullo F.C, gracias a la gran actuación de su jugador estrella Marcel Salas, ha tenido un excelente rendimiento en el último torneo lo que lo ha llevado a disputar la final del torneo en la localidad de Pelotillehue. Las posibilidades de éxito del equipo en dicho encuentro, dependen en gran medida del apoyo que pueda brindarle el público al equipo, por lo cual los dirigentes necesitan saber a cuantos hinchas pueden transportar como máximo desde el pueblo de Cachiyullo (C) hasta Pelotillehue (P). Para contestar esta pregunta se sabe que el servicio de transporte entre los 2 pueblos puede modelarse como la siguiente red.

En el grafo se indican las capacidades máximas de transporte por cada arco y no existen cotas inferiores para el transporte en cada uno de ellos.

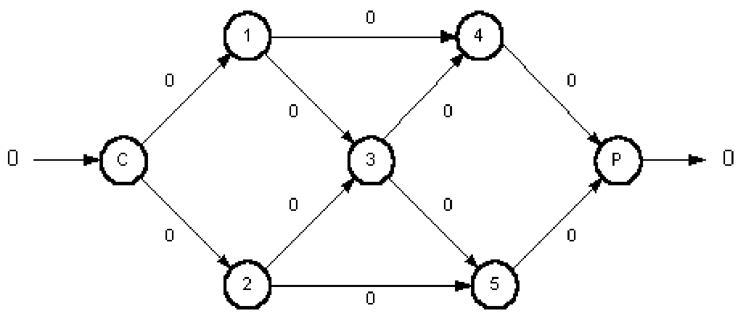


Solución

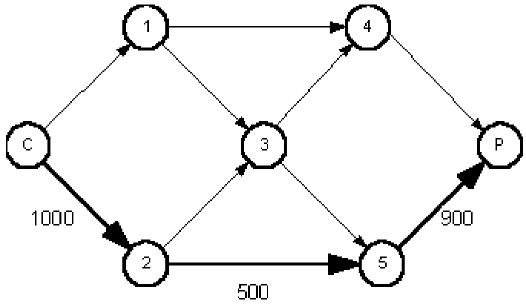
Para empezar a resolver el problema necesitamos una solución factible, pero como no hay restricciones de flujo mínimo en ningun arco, tenemos una solución trivial dada por $f_{ij} = 0$ para todo (i,j).

- Iteracion 1.

  Solución factible trivial:



Construimos un grafo auxiliar y luego buscamos un camino que una C con P. En nuestro caso, en el grafo auxiliar, elegimos el camino C $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 5 $\rightarrow$ P.

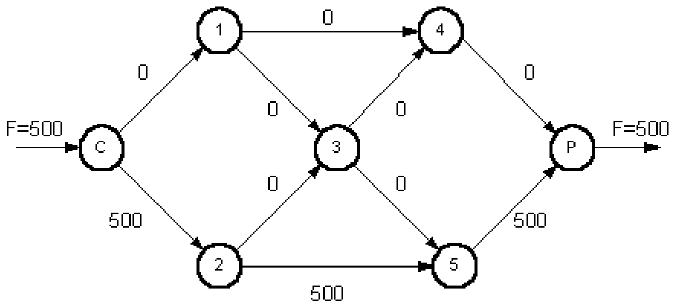


El aumento del flujo por el camino escogido viene dado por:

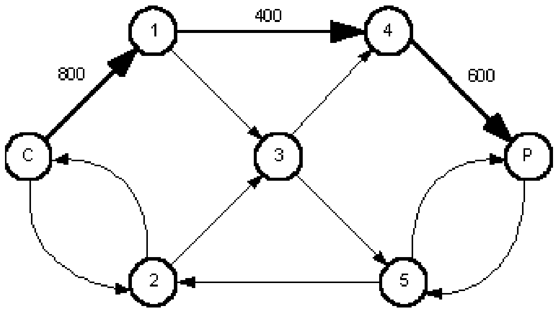
$$\begin{aligned}\theta &= \min\{1000 - 0, 500 - 0, 900 - 0\} \\ &= \min\{1000, 500, 900\} \\ &= 500\end{aligned}$$

- Iteracion 2.

  Solución factible obtenida aumentando en θ cada uno de los flujos de los arcos que pertenecen al camino escogido:



  Construimos un grafo auxiliar y luego buscamos un camino que una C con P. En nuestro caso, en el grafo auxiliar, elegimos el camino C $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ P.

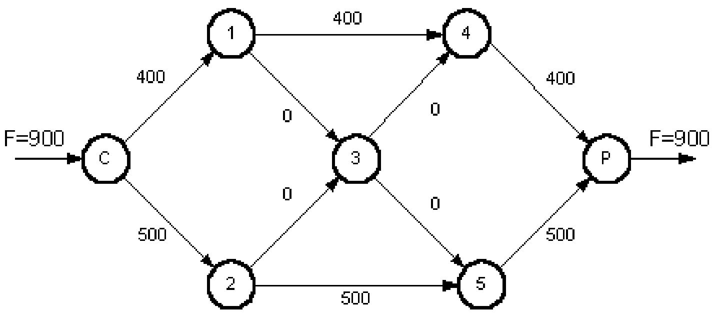


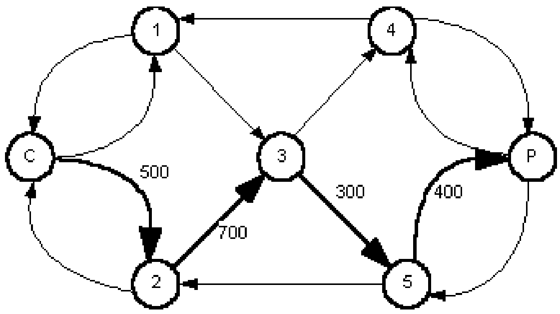
  El aumento del flujo por el camino escogido viene dado por:

$$\begin{aligned} \theta &= \min\{800-0, 400-0, 600-0\} \\ &= \min\{800, 400, 600\} \\ &= 400 \end{aligned}$$

- Iteracion 3.

  Solución factible dada por el aumento en θ por el camino escogido:





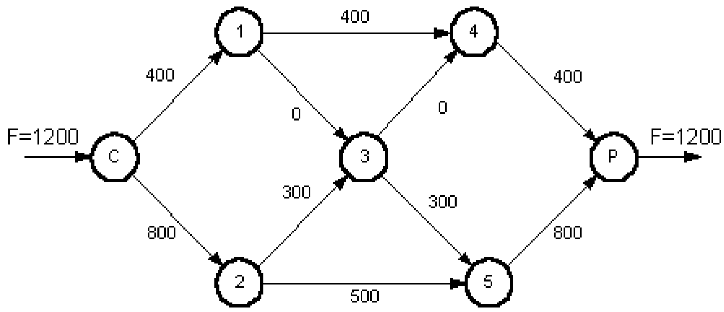
Construimos un grafo auxiliar y luego buscamos un camino que una C con P. En nuestro caso, en el grafo auxiliar, elegimos el camino C $\rightarrow$ 2 $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 5 $\rightarrow$ P.

El aumento del flujo por el camino escogido viene dado por:

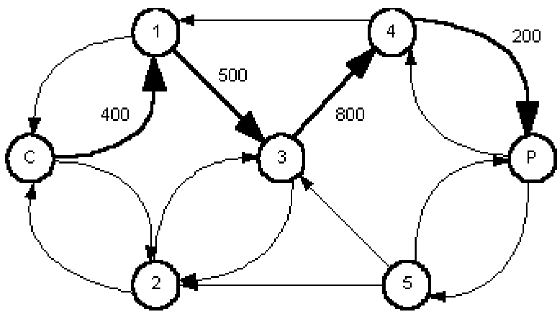
$$\begin{aligned}\theta &= \min\{1000-500, 700-0, 300-0, 900-500\} \\ &= \min\{500, 700, 300, 400\} \\ &= 300\end{aligned}$$

- Iteracion 4.

  Solución factible dada por el aumento en θ por el camino escogido:



  Construimos un grafo auxiliar y luego buscamos un camino que una C con P. En nuestro caso, en el grafo auxiliar, elegimos el camino C $\rightarrow$ 1 $\rightarrow$ 3 $\rightarrow$ 4 $\rightarrow$ P.

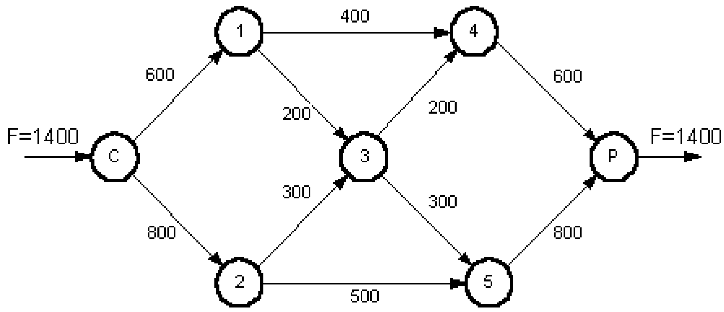


  El aumento del flujo por el camino escogido viene dado por:

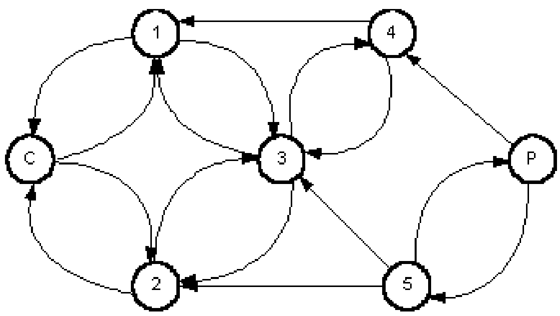
$$\begin{aligned}\theta &= \min\{800-400, 500-0, 800-0, 600-400\}\\ &= \min\{400, 500, 800, 200\}\\ &= 200\end{aligned}$$

- Iteracion 5.

  Solución factible dada por el aumento en θ por el camino escogido:



Construimos un grafo auxiliar y luego buscamos un camino que una C con P. Aquí, nos damos cuenta que no existe un camino que una C con P. Luego el problema es óptimo.



Finalmente, podemos decir que hasta 1400 hinchas apoyarán al Cachiyullo F.C en la final del torneo.

$\odot$